CHAPITRE 3 : MATRICES & SYS. D'EQ. LINEAIRES

3.1 LES MATRICES

3.1.1 L'anneau des matrices

Def. 3.1
- Soient $n, m \in \mathbb{N}_0$. Une matrice à m lignes et n colonnes est un tableau rectangulaire de nombres avec m ligne de chaque fois n nombres. Si A est une matrice, nous pouvons présenter cette matrice comme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $\forall i = 1, 2, \dots m$ et $j = 1, 2, \dots, n$.

- Les éléments a_{ij} sont appelés les coefficients ou les composantes de A. On dit que A est de dimension ou de taille (m, n)
- On peut noter A comme $(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ ou (a_{ij}).
- L'élément a_{ij} est la composante de A sur la i-ème ligne et la j-ème colonne.

⊙ Si $m = 1$, A est une matrice ligne

⊙ Si $n = 1$, A est une matrice colonne

⊙ Les éléments a_{ii} d'une matrice carée sont appelé la diagonale.

⊙ Une matrice carée avec tout ses éléments nuls (sauf ceux sur sa diagonal) est une matrice diagonale.

⊙ L'ensemble des matrice de taille (m, n) avec des coefficients réels est noté $Mat_{m,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{m \times n}$

Def 3.3 Addition de matrice : Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices $m \times n$. Alors, definissons une nouvelle matrice $m \times n$: la matrice somme de A et B : $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplication scalaire de $r \in \mathbb{R}$ avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$r \cdot A = (r\, a_{ij})$$

- On écrit $(-1).A = -A$
- On écrit $O_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ la matrice zéro

Def 3.5 Multiplication des matrices. Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $m \times n$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $n \times p$. Alors nous définissons $C = (c_{ij})$ une matrice $m \times p$ appelée produit de A et B, tq $\forall i = 1, .., m$ et $j = 1, .., p$, le composant c_{ij} est donné par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

- $\forall n \in \mathbb{N}_0$, la matrice carrée identité I_n est $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Pro 3.7 Considérons des matrices $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ et $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{p \times q}$. Alors nous avons les propriétés suivantes :

① $A(B + C) = AB + AC$

② $A(BD) = (AB)D$

DEMO

$\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) \overset{\text{associatif distributif}}{=} \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj})$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj}$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl} d_{lj} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} (a_{ik} b_{kl} d_{lj})$

$\displaystyle = \sum_{l=1}^{p} a_{ik} \sum_{k=1}^{n} (b_{kl} d_{lj})$

- Les matrices carrées avec $n \geq 1$ forment avec l'addition et la multiplication un anneau non commutatif.
- Dans le cas où $A \cdot B = B \cdot A$, on dit que les matrices A et B commutent

3.1.2 Transposée et trace d'une matrice

Def 3.8. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Alors la matrice transposée de A est la matrice $n \times m$ qui a l'élément a_{ji} sur la i-ième ligne et j-ième colonne. On interchange donc les lignes et les colonnes. On écrit la transposée de A : $A^t = (a^t_{ij}) = (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$

- Une matrice est symétrique si $A = A^t$ (d'office carrée)

Pro 3.10 Considérons des matrices $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et $r \in \mathbb{R}$. Alors nous trouvons :

① $(A^t)^t = A$

② $(A+B)^t = A^t + B^t$

③ $(rA)^t = rA^t$

④ $(AC)^t = C^t A^t$

DEMO

$\boxed{1}$ $(A^t)^t$ revient à permuter deux fois les lignes et colonnes, et donc à revenir à la matrice de départ

$\boxed{2}$ $A+B = (a_{ij}+b_{ij})$, donc $(A+B)^t = (a_{ji}+b_{ji}) = (a_{ji}) + (b_{ji})$

$\boxed{3}$ $rA = (ra_{ij})$ donc $(rA)^t = (ra_{ji}) = rA^t$

$\boxed{4}$ $AC = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, donc $(AC)^t = \sum_{k=1}^{n} a^t_{kj} b^t_{ik} = \sum_{k=1}^{n} b^t_{ik} a^t_{kj} = C^t A^t$

Def 3.11 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice carrée. Alors la trace de A est noté $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + \dots + a_{nn}$

Pro 3.13 Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $r \in \mathbb{R}$. Alors nous avons :

① $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$

② $Tr(rA) = r\,Tr(A)$

③ $Tr(A^t) = Tr(A)$

④ $Tr(I_n) = n$

DEMO

$\boxed{1}$ $A+B = (a_{ij}+b_{ij}) \Rightarrow Tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$

$\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ izi oklm

⊙ $\nexists$ formule pour la trace d'un produit matriciel

3.1.3 L'inverse d'une matrice

Def 3.14 Soit A une matrice carrée $n\times n$. A est inversible et A^{-1} est une matrice inverse $\Longleftrightarrow$ $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$

Le 3.16 Si A est une matrice inversible, alors A^{-1} est unique

DEMO

Supposons $\exists$ A' et A'' tq $A'A = I_n$ et $AA'' = I_n$. Alors

$$A' = A'I_n = A'(AA'') = (A'A)A'' = I_n A'' = A''$$

Alors $A' = A''$

Le 3.17 Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ des matrices inversibles, alors AB est aussi inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

DEMO

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A I_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I_n$

Donc AB est inversible avec $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

⊙ Il existe des matrices $\neq 0$ A et B tq AB est la matrice 0. Alors A et B sont appelé des diviseurs de zéro

Le 3.18 Soit A une matrice carrée $n\times n$ qui est diviseur de zéro. Alors A n'est pas inversible

DEMO

Comme A est diviseur de zero, $A \neq 0$ et $\exists B$ tq $AB = 0_{n\times n}$ et $B \neq 0$

Supposons A inversible, alors $\exists A^{-1}$ tq $A^{-1}A = I_n$. Alors

$$B = I_n B = A^{-1}AB = A^{-1}0_{n,n} = 0_{n,n} \text{ ✗ avec } B \neq 0$$

Def 3.19 (Transformations élementaires des lignes). Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Les transfo. élémentaires des lignes permettent de construire une nouvelle matrice $m\times n$ apd A. Il y a 3 transfos :

① Interchanger 2 lignes

② Multiplier une ligne avec $\lambda \neq 0$

③ Additionner une ligne avec un multiple d'une autre ligne.

Def 3.20 (Matrices élémentaires) Appliquons les transfo. élémentaires à la matrice identité et nous obtenons les 3 matrices élémentaires :

① Les matrices de transposition $T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots 1 \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots 0 & 0 \end{pmatrix}$

② Les matrices diagonales

$$D_i(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

③ Les matrices $E_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & & 1 \end{pmatrix}$

Pro 3.21 Si on multiplie une matrice A à gauche avec une matrice élémentaire, on obtient la matrice transformée par la transfo. élementaire correspondante.

? Le 3.22 | (3.1) $T_{ij} \, T_{ij} = I_n$

? (3.2) $D_i(\lambda) \, D_i(\lambda^{-1}) = I_n$

(3.3) $E_{i,j}(\lambda) \, E_{i,j}(-\lambda) = I_n$

Pro 3.23 | S'il est possible de transformer A en I_n par un # fini de transfo. élémentaire de ligne, alors ces même transfo. appliquées à la matrice identité donne A^{-1}

DEMO | Supposons qu'il existe $E_1 \dots E_k A = I_n$. Nous savons que E_i sont inversible (3.22), ainsi que leur produit (3.17)

? $(E_1 \dots E_k)^{-1} E_1 \dots E_k A = (E_1 \dots E_k)^{-1} I_n$

$= A = (E_1 \dots E_k)^{-1}$

$\Leftrightarrow \quad A^{-1} = E_1 \dots E_k I_n$

3.1.4 forme échelonnée d'une matrice

Def 3.25 | Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice. A est en forme échelonnée $\Leftrightarrow$ A satisfait les conditions suivantes

(E1) Toutes les lignes zéros sont en bas de la matrice

(E2) Le 1e élément $\neq 0$ sur une ligne se trouve directement à droite du 1e élément $\neq 0$ de la ligne au-dessus.

→ Une matrice échelonnée réduite respecte 2 condit° supp:

(E3) Le 1e élément de toute ligne $= 1$

(E4) Si une colonne contient 1e élement d'une ligne, toutes ses autres composantes $= 0$

⊙ Une matrice echelonnée a toutes ses composantes en dessous de la diagonale $= 0$

Th. 3.27 | Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice quelconque. Alors $\exists$ un nombre fini de transformations élémentaires de lignes, qui permettent de transformer la matrice A en une matrice sous forme echelonnée réduite.

→ La démonstration est constructive et est appelé la méthode de Gauss.

DEMO

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

① Si A possède une ou plusieurs lignes zéro, on utilise les transpositions $T_{i,j}$ pour les mettre en bas de la matrice. On obtient :

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$ avec $k \leq m$ et au moins une des $b_{ij} \neq 0$ $\forall i \leq k$

② On cherche mtn la 1e colonne avec $b_{ij} \neq 0$. Par $T_{i,j}$, on interchange la i-ème ligne avec la 1e ligne. On obtient :

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{1j} & c_{1j+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{2j} & c_{2j+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{kj} & c_{kj+1} & \cdots & c_{kn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$ avec $c_{1j} \neq 0$

③ Appliquons $\forall i = 2, .., k$ la transformation $E_{1,i}(c_{ij}\, c_{1j}^{-1})$ i.e additionner à la i-ème ligne la 1e ligne multiplier par $c_{ij}\, c_{1j}^{-1}$.

On obtient : $$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & d_{1j} & d_{1j+1} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_{2j+1} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_{kj+1} & \cdots & d_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

④ Recommençons la procédure sur la sous matrice : $\begin{bmatrix} d_{2j+1} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{kj+1} & \cdots & d_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

⑤ Après un nombre fini d'étape, on arrive à une forme echelonné de la matrice.

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & d_{1j_1} & \cdots & d_{1j_2-1} & d_{1j_2} & \cdots & d_{1j_k-1} & d_{1j_k} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{2j_2} & \cdots & d_{2j_k-1} & d_{2j_k} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{kj_k+1} & \cdots & d_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

⑥ Pour la forme echelonnée réduite, multiplions chacune des k premières lignes avec la matrice $D_i(d_{ij_i}^{-1}) \Rightarrow$ 1e element de chaque ligne devient 1. Puis multiplier par $E_{pq}(\lambda)$ pour eliminer les coeff. restant de la colonne du 1e element de chaque ligne.

Pro 3.29 Une matrice A est inversible $\Leftrightarrow$ sa forme echelonnée réduite est égale à la matrice identitée

DEMO Si la forme E.R de A est I_n, alors un nombre fini de transfo. élémentaires de ligne transforme A en I_n. (3.27)
Alors, A est inversible (3.23).
Donc, on peut écrire $A' = E_1 \cdots E_k A$ avec E_i mat. élémentaires
Si $A' \neq I_n$, sa dernière ligne de sa forme E.R. est nulle.
Soit $D = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, alors $DA' = 0_{n,n} \Rightarrow DEA = DA' = 0_{n,n}$

$\Rightarrow A$ est un diviseur de 0 et donc pas inversible

Co 3.30 Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Alors soit A est inversible soit A est un diviseur de 0.
Donc A admet un inverse à gauche $\Leftrightarrow$ A admet un inverse à droite $\Leftrightarrow$ A est inversible

⊙ On peut trouver la matrice A^{-1} (si A est inversible) en utilisant la méthode de Gauss : il faut l'appliquer à la matrice $(A | I_n) \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$ et on obtient $(I_n | A^{-1})$.

3.2. SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

Def 3.32 • Un système d'équation linéaire à t inconnues à coefficients dans $\mathbb{R}$ est une expression du type :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1t}x_t = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2t}x_t = b_2 \\ \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{st}x_t = b_s \end{cases} = \sum_{j=1}^{t} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \ldots, s)$$

et $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$

• Si $b_1 = \ldots = b_s = 0$, alors (S) est homogène, sinon il est non-homogène

• Une solution de (S) est un vecteur $\in \mathbb{R}^t$ vérifiant chacune des équations de (S).

→ $(0, \ldots, 0)$ est solution de (S) $\Leftrightarrow$ (S) est homogène (solut° triviale)

→ Si (S) n'a aucune solution, il est inconsistent

→ Si (S) a au moins 1 solution, il est consistent

↳ Un système homogène est donc toujours consistant

- Le but de cette section est de résoudre un système d'éq. (S) i.e. déterminer l'ensemble W des solutions de (S).
- Deux systèmes (S) et (S') sont équivalents $\Leftrightarrow$ ils ont le même ensemble de solution W.
- On peut écrire le système sous forme de matrice :

$$AX = B \quad \text{avec la matrice étendue } (A|B)$$

Pro 3.34 Considérons $(S) = AX = B$. Si $M \in \mathbb{R}^{s \times s}$ est inversible, alors

$$MAX = MB$$

Co 3.35 Si on applique des transformation élémentaires de lignes à la matrice étendue d'un système d'équation linéaire, nous trouvons un système équivalent

CH 4 : ESPACES VECTORIELS

4.1 CORPS COMMUTATIFS

Def 4.1 Un corps commutatif ou un champ $\mathbb{K}$ est un ensemble, dont les éléments sont appelés nombres (ou scalaires), muni de deux opérations internes :

① Addition $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, (a,b) \mapsto a+b$

② Multiplication $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, (a,b) \mapsto a \cdot b = ab$

et en possession de $0 \in \mathbb{K}$, appelé l'élément zéro, et $1 \in \mathbb{K}$, appelé l'unité, qui satisfont les propriétés suivantes :

C1 addition associative : $\forall a,b,c \in \mathbb{K}, (a+b)+c = a+(b+c)$

C2 0 neutre pour l'addition : $\forall a \in \mathbb{K}, a+0 = a = 0+a$

C3 $\exists$ inverse pour l'addition : $\forall a \in \mathbb{K}, \exists -a \in \mathbb{K} \mid a+(-a) = 0 = (-a)+a$

C4 + commutatif : $\forall a,b \in \mathbb{K}, a+b = b+a$

C5 $\cdot$ associative : $\forall a,b,c \in \mathbb{K}, a(bc) = (ab)c$

C6 1 est le neutre de $\cdot$: $\forall a \in \mathbb{K}, 1a = a = a1$

C7 $\cdot$ distributive % + : $\forall a,b,c \in \mathbb{K}, a(b+c) = ab+ac$ et $(a+b)c = ac+bc$

C8 $\cdot$ commutative : $\forall a,b \in \mathbb{K}, ab = ba$

C9 $\exists$ inverse pour $\cdot$: $\forall a \in \mathbb{K}_0, \exists a^{-1} \in \mathbb{K} \mid aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$